

Analiza matematyczna
Lista 1 (granice funkcji)

Zad 1. Obliczyć granicę funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 , gdzie

- a) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$, $x_0 = 3$, b) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2+x-1}$, $x_0 = 1$, c) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, $x_0 = 1$,
d) $f(x) = \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$, $x_0 = 2$, e) $f(x) = \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$, $x_0 = 1$, f) $f(x) = \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$, $x_0 = 3$,
g) $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x-2}}$, $x_0 = 4$, h) $f(x) = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2}\right)$, $x_0 = 1$, i) $f(x) = \frac{\sin 5x}{3x}$, $x_0 = 0$,
j) $f(x) = \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$, $x_0 = 0$.

Zad 2. Oblicz granice:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 1}{3x^3 + 2x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$
f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^7 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 2} - \sqrt{x^2 + 6x - 8})$
i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2}\right)^{3x+2}$ j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ $m, n \in \mathbb{N}$,
k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$ l) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^m - 1} - \frac{1}{x^n - 1}\right)$ $m, n \in \mathbb{N}$,
m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x + 1} - \cos \sqrt{x})$ n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 2x}$ o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$
p) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \sqrt{\cos x}$ r) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$ s) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\arcsin(x + 2)}$ t) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}$
u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$ w) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(x^{10} + 3x + 2)}$

Zad 3. Obliczyć granice:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x - 1}\right)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx}$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)^{2x-1}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{2x - 1}\right)^x$, f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + a}{x - a}\right)^x$.

Zad 4. Obliczyć granice $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ funkcji:

- a) $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{x + \sqrt{x^2 + b^2}}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$

Zad 5. Obliczyć granice jednostronne funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 :

- a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $x_0 = 3$, b) $f(x) = \frac{1}{3-x}$, $x_0 = 3$, c) $f(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$, $x_0 = 3$,
d) $f(x) = \frac{1}{(3-x)^3}$, $x_0 = 3$, e) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$, $x_0 = 1$, f) $f(x) = 2^{\frac{1}{1-x}}$, $x_0 = 1$,
g) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$, $x_0 = -2$, h) $f(x) = \frac{3}{9-x^2}$, $x_0 = -3$,
i) $f(x) = e^{\frac{-2}{x-3}}$, $x_0 = 3$, j) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$.

Zad 6. Zbadać istnienie granic funkcji:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, gdzie $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{dla } x < 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & \text{dla } x > 0 \end{cases}$